Les statistiques descriptives et les intervalles de confiance

Yohann.Foucher@univ-nantes.fr

Equipe d'Accueil 4275 "Biostatistique, recherche clinique et mesures subjectives en santé", Université de Nantes

Odontologie - Cours #2

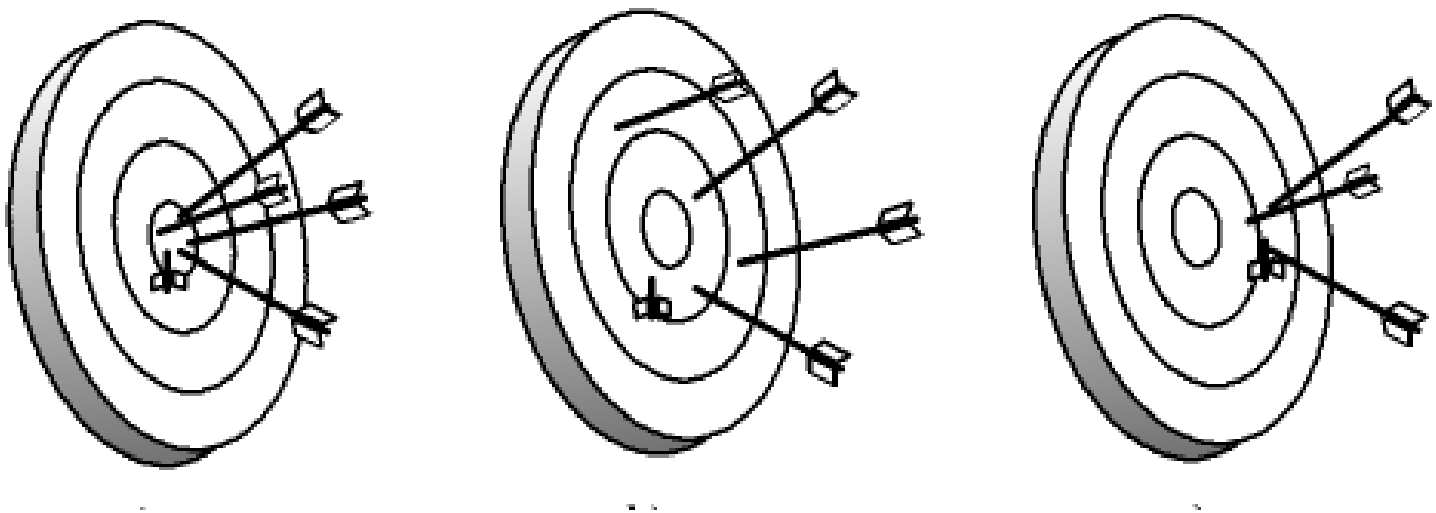
UNIVERSITÉ DE NANTES
CENTRE HOSPITALIER UNIVERSITAIRE DE NANTES
itun institut transplantation urologie néphrologie INSERM - UMR 643

Plan

Plan

Deux grandes catégories d'indicateurs

- Les statistiques dites de localisation.
- Les statistiques dites de dispersion.



** Auteur : Christophe Dang Ngoc Chan*

Plan

Les indicateurs de localisation

- La moyenne est l'indicateur de localisation le plus fréquemment utilisé.
  Soit X cette v.a. dont on observe N expériences : x_1, x_2, ..., x_N.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

- La médiane est la valeur qui partage l'échantillon en deux groupes de même effectif.
- Pour le calcul, ordonner les valeurs observées :

$$1.1, 7.8, 9.9, 3.3, 5.4$$

$$\Downarrow$$

$$1.1, 3.3, \underline{5.4}, 7.8, 9.9$$

Les indicateurs de localisation

- Le 1er quartile (Q_1) est la valeur qui identifie le quart des données inférieures.
- Le 2nd quartile est aussi la médiane...
- Le 3ème quartile (Q_3) est la valeur qui identifie le quart des données supérieures.
- Le mode est la valeur la plus représentée.
- Le minimum est la valeur la plus faible.
- Le maximum est la valeur la plus forte.

Les indicateurs de dispersion

- La variance mesure la variabilité autour de la moyenne.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

- L'écart-type respecte la même unité que la variance (plus facile à interpréter)

$$s = \sqrt{s^2}$$

- L'intervalle interquartiles (IQ) est la distance entre le 1er et le 3ème quartile.
- L'étendue est la distance entre le minimum et la maximum.

Quelques conventions

- Grands échantillons :
  1. moyenne ($\pm$ écart-type)
  2. moyenne (minimum-maximum)
- Petits échantillons :
  1. médiane (intervalle interquartiles)
  2. médiane (minimum-maximum)

Quelques conventions

- Grands échantillons :
  1. moyenne ($\pm$ écart-type)
  2. moyenne (minimum-maximum)
- Petits échantillons :
  1. médiane (intervalle interquartiles)
  2. médiane (minimum-maximum)

Problèmes liés à la moyenne :

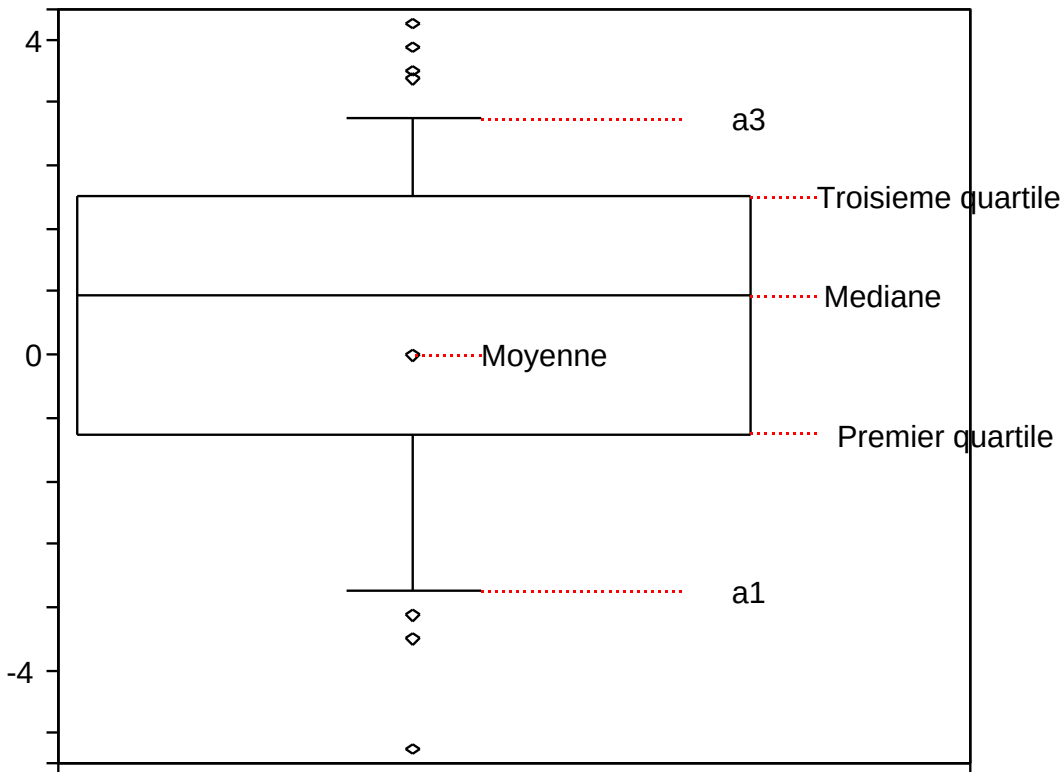
- Sensible aux valeurs extrêmes (en particulier pour les petits échantillons).
- N'a de sens que pour des lois symétriques et unimodales.

Les règles à respecter pour un graphique

- Libellés des deux axes.
- Unités des deux axes.
- Légende explicite.
- Titre.
- Eviter les couleurs ou la 3D sauf nécessité.

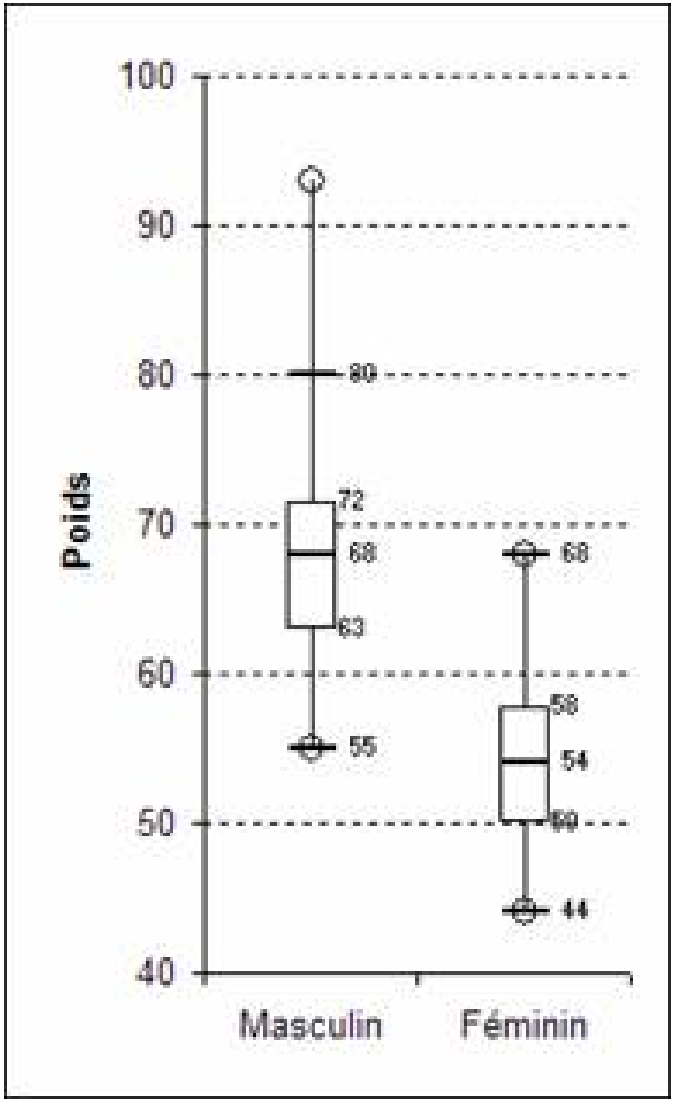
La boite à moustache

- a_1 est la plus petite valeur supérieure à $Q_1 - 1.5 \times IQ$
- a_3 est la plus grande valeur inférieure à $Q_3 + 1.5 \times IQ$
- Les valeurs en dehors de ces bornes sont "extrêmes"

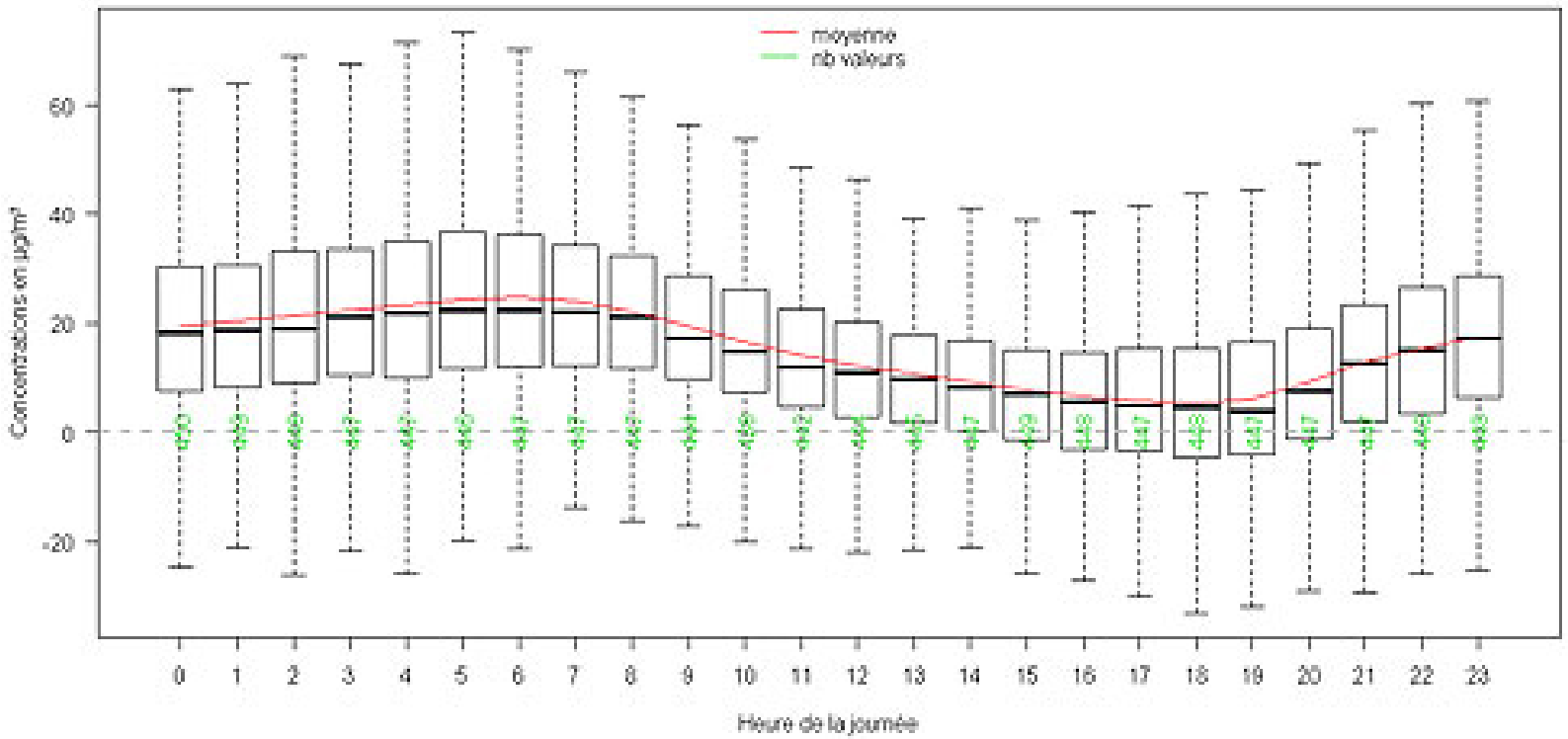


** Auteur : Hélène Guérin*

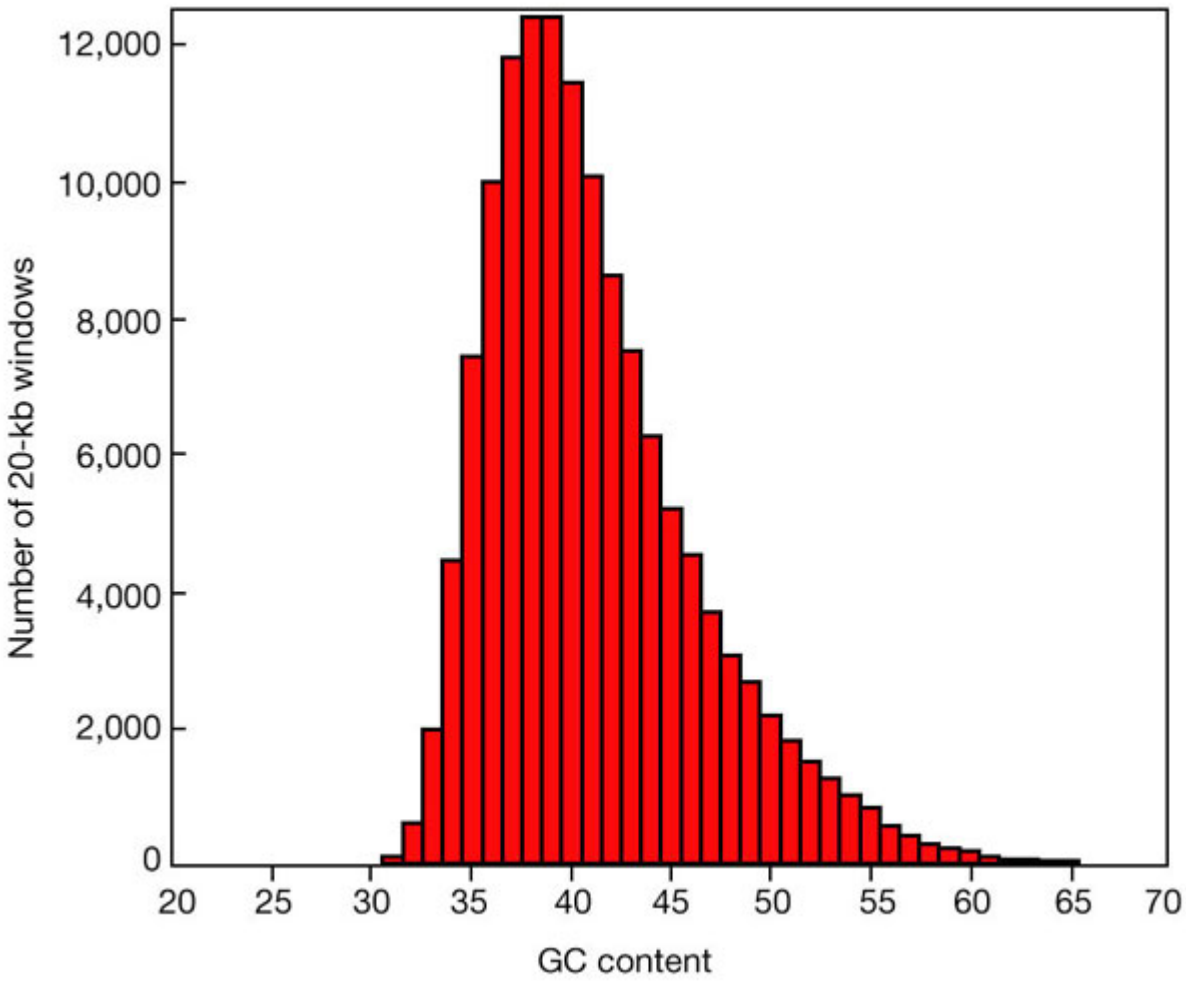
La boite à moustache pour comparer deux groupes



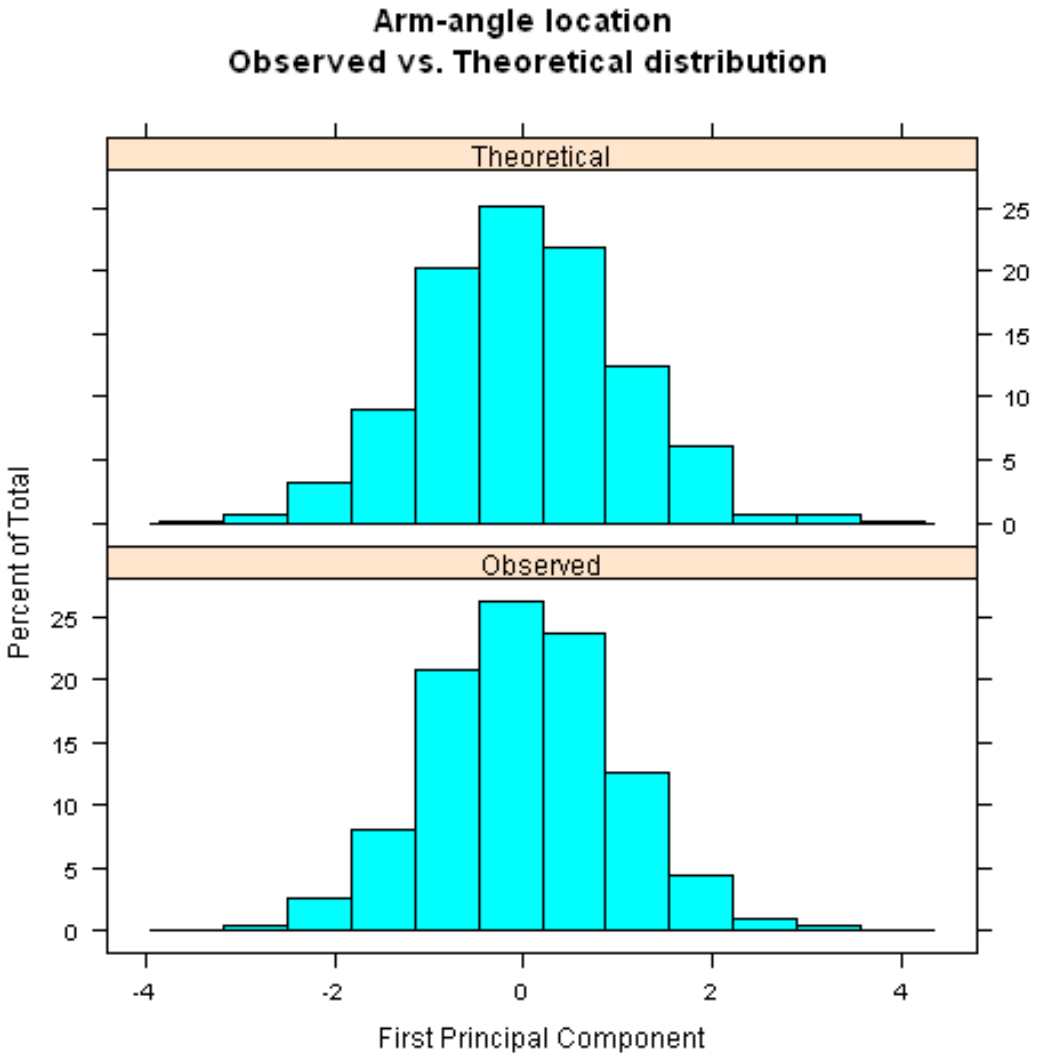
La boite à moustache pour décrire une évolution



L'histogramme (les rectangles sont contigus)



L'histogramme pour comparer deux groupes



Plan

Contexte général

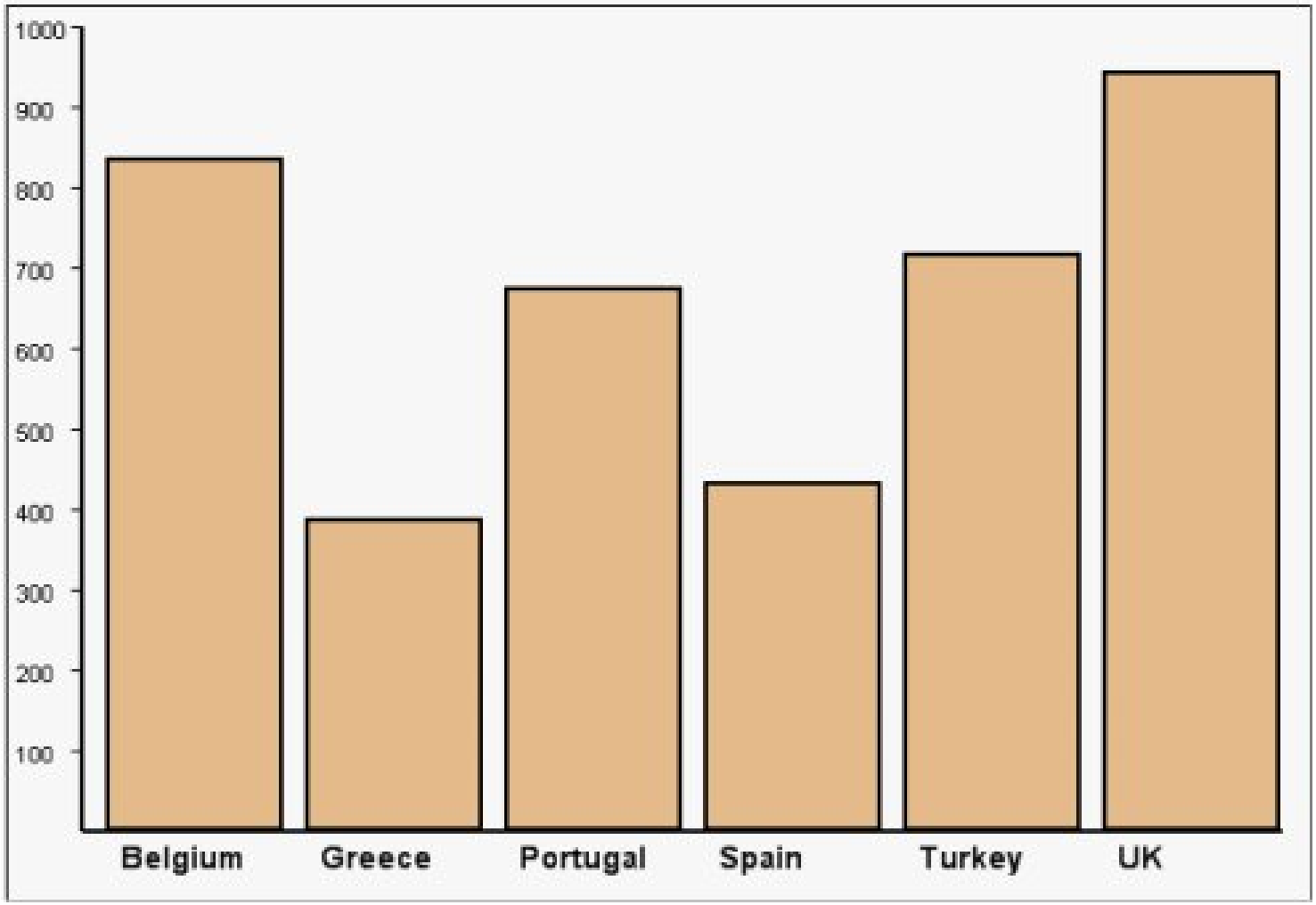
On s'intéresse à un v.a. aléatoire discrète X à p modalités à partir d'un échantillon de taille N :

Modalités	x_1	x_2	...	x_p
Effectifs	N_1	N_2	...	N_p
Fréquences	$f_1 = N_1/N$	$f_2 = N_2/N$	...	$f_p = N_p/N$

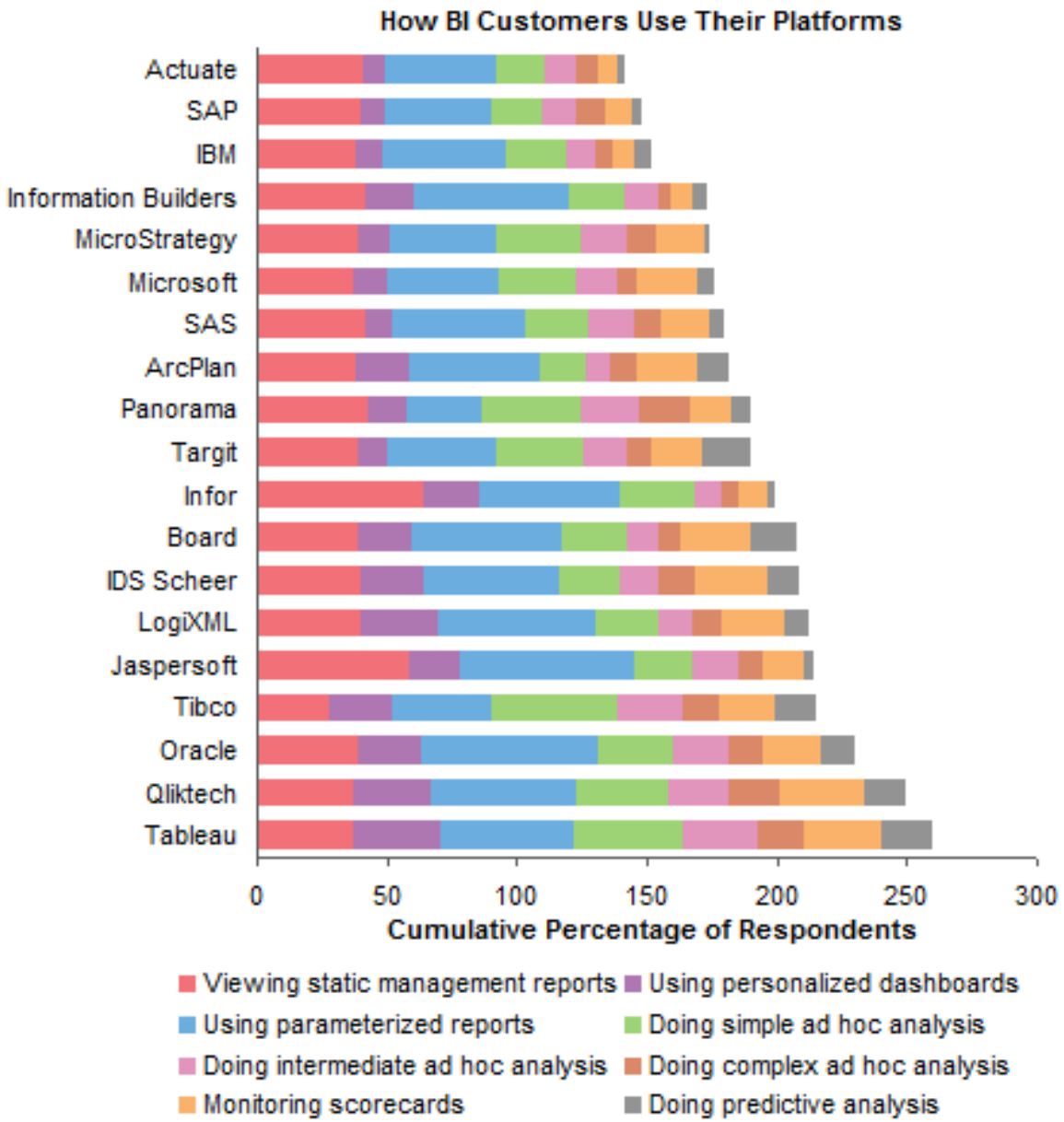
Deux représentations couramment utilisées :

- le graphique en bâtons
- le camembert
- le graphique en araignée

Graphique en bâtons

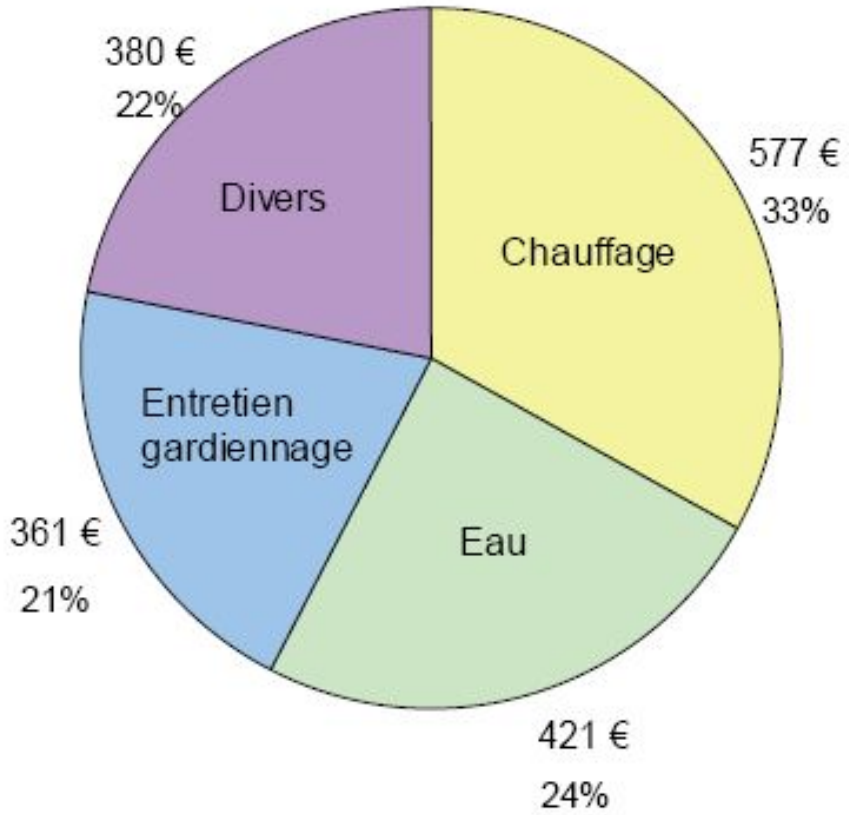


Graphique en bâtons



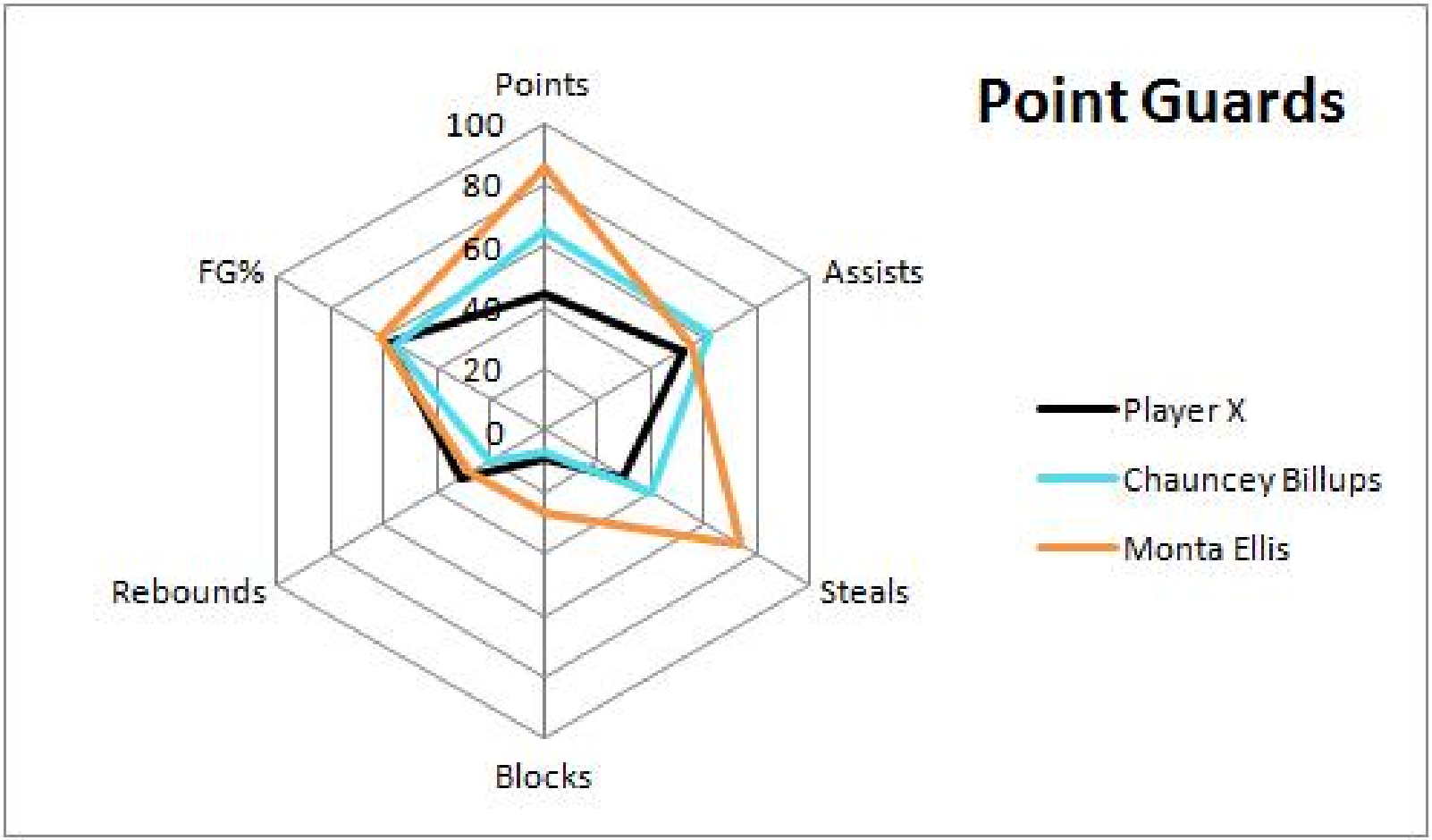
Camembert

Exemple de répartition des postes de charges en 2006 (résidences équipées d'un chauffage, d'une production d'eau chaude sanitaire collective et d'un ascenseur)



Source : étude sur les charges locatives en 2006.

Graphique en araignée



Les tableaux de contingence

- On s'intéresse à 2 v.a. aléatoires discrètes.
- Exemple : Tests diagnostiques.

		Test diagnostique T^+	T^-	Total
Statut de référence	M^+	a	b	$a+b$
	M^-	c	d	$c+d$
	Total	$a+c$	$b+d$	N

- Le statut de référence est défini par le gold standard.
- Deux types d'erreurs :
  - b faux négatifs : sujets ayant un test négatif alors qu'ils sont malades.
  - c faux positifs : sujets ayant un test positif alors qu'ils sont sains.

Plan

Plan

Intervalle de confiance

- Soit un échantillon de taille N et $x_1, x_2, \cdots, x_N$ les observations d'une variable aléatoire continue.
- La moyenne de la population (μ) est estimée par $\bar{x}$.
- Si $N > 30$ (TCL), alors on sait aussi que

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, s/\sqrt{N})$$

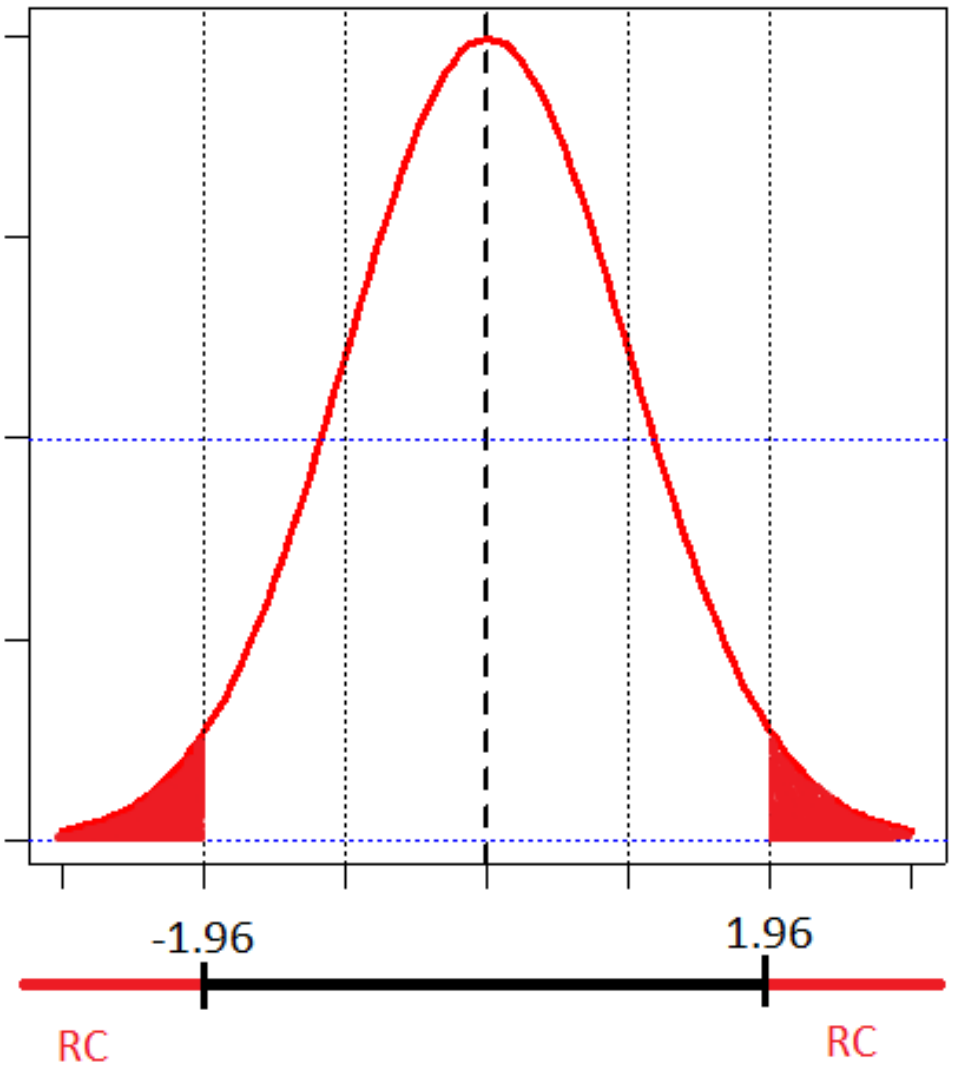
- En centrant et réduisant, on obtient :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Pour obtenir l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne estimée, on cherche l'intervalle à l'intérieur duquel on a 95% de chance de retrouver la moyenne théorique de la population :

$$Pr(-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N}} < 1.96) = 0.95$$

Intervalle de confiance



Intervalle de confiance

$$Pr\left(-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N}} < 1.96\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Pr\left(\bar{X} - 1.96\frac{s}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{s}{\sqrt{N}}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow$$

$$IC_{95\%}(\mu) = \left[\bar{x} \pm 1.96\frac{s}{\sqrt{N}}\right]$$

Intervalle de confiance

- Exemple

On cherche à estimer l'âge moyen au diagnostic d'un cancer du sein. On observe une moyenne $\bar{x}$ de 58 ans et l'écart-type estimé de l'âge est à 30 ans (échantillons de 100 femmes). Quelle est l'intervalle de confiance de la moyenne ?

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(\mu) &= \left[58 \pm 1.96 \frac{30}{\sqrt{100}}\right] \\ &= [52.12; 63.88] \end{aligned}$$

Si on réalise 100 échantillons comme celui-ci, on attend 95 moyennes estimées comprises entre 52 et 63 ans.

Plan

Intervalle de confiance

- Soit un échantillon de taille N et $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_N$ les observations d'une variable aléatoire discrète $X = \{0, 1\}$.
- La proportion p de $\{X = 1\}$ de la population est estimée par la fréquence $f = \sum_i x_i / N$.
- Comme précédemment grâce au théorème central limite, nous pouvons utiliser les propriétés de la loi normale.
- Si $N > 30$ $Np > 5$ et $N(1-p) > 5$ (TCL), alors on sait aussi que

$$F \sim \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right)$$

- En respectant les mêmes développements que précédemment, on démontre :

$$IC_{95\%}(p) = \left[f \pm 1.96\sqrt{\frac{f(1-f)}{N}}\right]$$